

Расчетная работа №3: Математическое моделирование экономических задач.

Цель: анализ межотраслевых связей и оценка их влияния на объем и структуру валового продукта.

Основные теоретические положения:

Модель Леонтьева многоотраслевой экономики

Макроэкономика функционирования многоотраслевого хозяйства требует баланса между отдельными отраслями. Каждая отрасль, с одной стороны, является производителем собственной продукции, а с другой стороны — потребителем продукции, выпускаемой другими отраслями. Возникает довольно непростая задача расчета связи между отраслями через выпуск и потребление продукции разного вида. Впервые эта проблема была сформулирована в виде математической модели в трудах известного американского экономиста В. Леонтьева в 1936 г., который попытался проанализировать причины экономической депрессии США 1929-1932 гг. Эта модель основана на алгебре матриц и использует аппарат матричного анализа.

23.1. Балансовые соотношения. Для простоты будем полагать, что производственная сфера хозяйства представляет собой n отраслей, каждая из которых производит свой однородный продукт. Для обеспечения производства каждая отрасль нуждается в продукции других отраслей (производственное потребление). Обычно процесс производства рассматривается за некоторый период; в ряде случаев такой единицей служит год.

Введем следующие обозначения:

- x_i — общий объём продукции i -й отрасли (ее валовой выпуск);
- x_{ij} — объём продукции i -й отрасли, потребляемый j -й отраслью при производстве её продукции в объёме x_j ;
- y_i — объём продукции i -й отрасли, предназначенный для реализации (потребления) в непроизводственной сфере, или так называемый *продукт конечного потребления*. К нему относятся личное потребление граждан, удовлетворение общественных потребностей, содержание государственных институтов и т.д.

Балансовый принцип связи различных отраслей промышленности состоит в том, что валовой выпуск i -й отрасли должен быть равен сумме объёмов потребления в производственной и непроизводственной сферах. В самой простой форме (гипотеза линейности, или простого сложения) балансовые соотношения имеют вид

$$x_i = x_{i1} + x_{i2} + \dots + x_{in} + y_i, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Эти уравнения называются *соотношениями баланса*.

Поскольку продукция разных отраслей имеет разные измерения, в дальнейшем будем иметь в виду стоимостный баланс.

23.2. Линейная модель многоотраслевой экономики. В. Леонтьевым, на основании анализа экономики США в период перед второй мировой войной, был установлен важный факт:

в течение длительного времени отношения x_{ij}/x_j меняются очень незначительно.

Это явление имеет естественное объяснение: технология производства остаётся на одном и том же уровне довольно длительное время, и, следовательно, объём x_{ij} потребления j -й отраслью продукции i -й отрасли при производстве своей продукции объёма x_j есть технологическая константа.

В силу указанного факта в дальнейших построениях естественно допустить, что указанные отношения x_{ij}/x_j являются константами. Это допущение называют *гипотезой линейности*, а производство, удовлетворяющее этому допущению — *линейным*. Числа $a_{ij} = x_{ij}/x_j$ называют *коэффициентами прямых затрат*, а матрицу

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

составленную из этих чисел — *матрицей прямых затрат*, или *матрицей технологии производства*.

Согласно гипотезе линейности,

$$x_{ij} = a_{ij}x_j; \quad i, j = 1, 2, \dots, n.$$

$$\begin{aligned}
 X = AX + Y &\Leftrightarrow EX = AX + Y \\
 &\Leftrightarrow EX - AX = Y \\
 &\Leftrightarrow (E - A)X = Y.
 \end{aligned}$$

Если матрица $E - A$ обратима (т. е. существует обратная матрица $(E - A)^{-1}$), то для любого Y существует единственное решение X последнего уравнения, получаемое умножением обеих частей этого уравнения слева на матрицу $(E - A)^{-1}$:

$$X = (E - A)^{-1}Y.$$

Матрицу $(E - A)^{-1}$ называют *матрицей полных затрат*.

Существует несколько критериев продуктивности матриц. Приведём два из них.

Теорема 23.2 (Первый критерий продуктивности). *Неотрицательная матрица A продуктивна тогда и только тогда, когда матрица $(E - A)^{-1}$ существует и неотрицательна.*

Теорема 23.3 (Второй критерий продуктивности). *Матрица A с неотрицательными элементами продуктивна, если сумма элементов по любому её столбцу (строке) не превосходит единицы, причём хотя бы для одного столбца (строки) эта сумма строго меньше единицы.*

Индивидуальные задания

Задание №1. В следующей таблицы приведены данные по балансу за некоторый период между пятью отраслями промышленности. Найти векторы конечного потребления и валового выпуска, а также матрицу коэффициентов прямых затрат и определить, является ли она продуктивной, пользуясь приведенными ниже критериями.

1-вариант

№	Отрасль	Потребление					Конечный продукт	Валовой продукт
		1	2	3	4	5		
1	Станкостроение	20	12	22	25	18	20	117
2	Энергетика	5	2	30	10	10	30	87
3	Машиностроение	10	4	15	5	7	15	56
4	Автомобильная промышленность	5	10	10	15	10	5	55
5	Добыча и переработка углеводородов	7	15	15	10	2	10	59

2-вариант

№	Отрасль	Потребление					Конечный продукт	Валовой продукт
		1	2	3	4	5		
1	Станкостроение	10	14	24	23	16	20	107
2	Энергетика	15	4	35	15	7	20	96
3	Машиностроение	7	6	10	10	10	10	53
4	Автомобильная промышленность	10	5	10	5	5	5	40
5	Добыча и переработка углеводородов	10	15	15	10	3	15	68

3-вариант

№	Отрасль	Потребление					Конечный продукт	Валовой продукт
		1	2	3	4	5		
1	Станкостроение	5	12	20	22	14	20	93
2	Энергетика	10	6	30	10	5	10	71
3	Машиностроение	15	5	25	5	15	10	75
4	Автомобильная промышленность	10	10	5	15	5	30	75
5	Добыча и переработка углеводородов	10	10	10	15	2	15	62

Задание №2. Следующая таблица содержит данные трех отраслей промышленности за некоторый период. Найти объем валового выпуска продукции, при котором конечное потребление по отраслям увеличивается до 60, 70 и 30.

Вариант-1

№	Отрасль	Потребление			Конечн. потребл.	Валовой выпуск
		1	2	3		
1	Добыча и переработка углеводородов	10	25	20	40	95
2	Энергетика	20	15	10	30	75
3	Машиностроение	15	10	20	20	65

Вариант-2

№	Отрасль	Потребление			Конечн. потребл.	Валовой выпуск
		1	2	3		
1	Добыча и переработка углеводородов	5	10	10	60	85
2	Энергетика	15	5	5	40	65
3	Машиностроение	20	15	25	30	90

Вариант-3

№	Отрасль	Потребление			Конечн. потребл.	Валовой выпуск
		1	2	3		
1	Добыча и переработка углеводородов	10	10	20	80	120
2	Энергетика	15	5	5	20	45
3	Машиностроение	20	15	30	40	105

Контрольные вопросы:

- 1) Какая матрица называется продуктивной. Дайте экономическую интерпретацию продуктивности.
- 2) Какие основные задачи решаются на основе модели Леонтьева?